Quantenlimit der Linienbreite einer chaotischen Laserkavität

M. Patra, H. Schomerus, K. Frahm und C. W. J. Beenakker
Instituut-Lorentz, Universiteit Leiden, Postbus 9506, 2300 RA Leiden, Niederlande

Weit oberhalb der Laserschwelle eines Lasers gilt: Linienbreite $\delta\omega \propto$ Intensität I^{-1}. Was ist der Proportionalitätsfaktor?

Die Linienbreite $\delta\omega = K\Gamma^2/2I$ ist abhängig von der Zerfallsrate Γ (z.B. Verlust wegen Transmission durch die Spiegel) der lasenden Mode.

Der numerische Vorfaktor $K \geqslant 1$ heißt Petermannfaktor. Für einen traditionellen Laser ist $K = 1$. Was ist K für eine chaotische Laserkavität?

Streumatrixformalismus

Wieviel Strahlung wird vom System in Abhängigkeit von der einfallenden Strahlung emittiert?

Lineares System, das durch einen Wellenleiter mit N Moden an die Außenwelt angebunden ist $\Rightarrow$ vollständige Beschreibung durch eine $N \times N$-Matrix, die Streumatrix S.

Beschreibung einer Kavität durch:

Hamiltonoperator der geschlossenen Kavität	H_0
Öffnung beschrieben durch Kopplungsmatrix	W
Medium beschrieben durch Verstärkungsrate	$1/\tau_a$

Gesamter „kalter“ Hamiltonoperator:

$$H = H_0 - \mathrm{i}\pi W W^\dagger$$

Zusammenhang zwischen S und Hamiltonoperator:

$$S(\omega) = 1 - 2\pi\mathrm{i}W^\dagger(\omega - H - \mathrm{i}/2\tau_a)^{-1}W$$

Austretende Lichtintensität:

$$I(\omega) = \tfrac{1}{2\pi}\,\mathrm{tr}\left[S^\dagger(\omega)S(\omega) - 1\right]$$

Zufallsmatrixtheorie

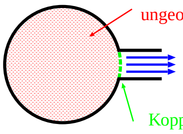
Position von Streuzentren und Unregelmäßigkeiten der Ränder sind nicht kontrollierbar $\Rightarrow$ H_0 ist zufällig (Genauer: Alle Elemente von H_0 sind unabhängig voneinander Gauß-verteilt)

Zufälligkeit eingeschränkt abhängig von Zeitumkehrsymmetrie:

- erhalten ($\beta = 1$): H_0 reell, symmetrisch
- gebrochen ($\beta = 2$): H_0 komplex, selbstadjungiert

Aufgabenstellung: Aus der bekannten (und beinahe trivialen) Verteilung von H_0 die Statistik von K berechnen!

Chaotische Laserkavität



Unordnung im Medium $\Rightarrow$ chaotische Dynamik in der Kavität

Universelles Verhalten, einzige Parameter sind:

Mittlerer Abstand der internen Moden:	Δ
Transmissionswahrscheinlichkeit durch Öffnung:	T

Petermannfaktor

In Nähe der Laserschwelle:

Laserschwelle $\leftrightarrow$ Pol des l-ten Eigenwertes von H

l-ter Eigenwert von H: $\Omega - \mathrm{i}\Gamma/2$

Matrix der Eigenwerte von H: U

Nur der Beitrag der l-ten Mode ist relevant:

$$I(\omega) = \frac{\Gamma^2}{2\pi}\frac{(U^\dagger U)_{ll}(U^{-1}U^{-1\dagger})_{ll}}{(\omega-\Omega)^2 + \frac14(\Gamma - 1/\tau_a)^2}$$

Lorentzkurve mit Breite $\delta\omega = \Gamma - 1/\tau_a$

Gesamte Intensität:

$$I = (U^\dagger U)_{ll}(U^{-1}U^{-1\dagger})_{ll}\frac{\Gamma^2}{\Gamma - 1/\tau_a}$$

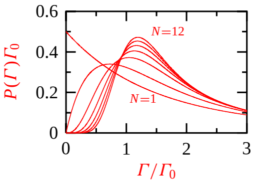
Auflösen von $\delta\omega = K\Gamma^2/2I$ ergibt

$$\boxed{K = (U^\dagger U)_{ll}(U^{-1}U^{-1\dagger})_{ll}}$$

Nichtorthogonalität der Eigenmoden

Wie gehen wir vor?

Wir berechnen $P(K)$ für gegebenes Γ.



Qualitativer Unterschied:
$N = 1$: Kleine Γ häufig
$N \gg 1$: Mittlere Γ häufig

Das Medium ist verstärkend in einem Frequenzbereich $L\Delta$.
Lasende Mode ist Mode mit dem kleinsten Γ im Fenster.
$\Rightarrow$ Verteilungsfunktion $P_L(\Gamma)$

Wir brauchen $P(K)$ nur für „vernünftige“ Werte von Γ (d.h $P_L(\Gamma)$ nicht vernachlässigbar klein) zu bestimmen.

Ergebnisse und Ausblick

Abhängig von der Anzahl N der ausgekoppelten Moden:
Für $N = 1$: $K \approx 1$, meistens vernachlässigbar
Für $N \gg 1$: $K \propto \sqrt{N}$ $\Rightarrow$ wichtig bei breiter Öffnung

Chaotische Streuung $\Rightarrow$ starke Verbreiterung der Laserlinie

Lit.: M. Patra et al., Phys. Rev. **A 61**, 23810 (2000)
K. Frahm et al., Europhys. Lett. **49**, 48–54 (2000)
H. Schomerus et al., Physica **A 278**, 469–496 (2000)

Eine offene Mode

Übergang von schwach ausgekoppelter Kavität ($T \ll 1$) zur vollen Auskopplung ($T = 1$).
Kopplungsmatrix besteht aus Element w: $T = 4w(1+w)^{-2}$

Verteilungsfunktion für beliebige Mode: $P(\Gamma) \propto \Gamma^{(2-\beta)/2}\exp\left(-\frac{\beta\pi\Gamma}{4w\Delta}\right)$

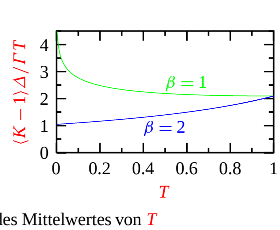
Verteilungsfunktion für lasende Mode: $P_L(\Gamma) \propto \exp\left(-\beta\frac{L\pi\Gamma}{4w\Delta}\right)$

Typischer Wert für lasende Mode: $\Gamma \sim w\Delta L^{-2/\beta} \ll w\Delta$

Wir brauchen nur kleine Γ zu betrachten!

Resummierung in Γ $\Rightarrow$ mittlerer Petermannfaktor:

$$\langle K\rangle_{\Omega,\Gamma} = \begin{cases} 1 - \dfrac{\Gamma}{\Delta}\dfrac{2\pi}{3}\dfrac{G^{22}_{22}\left(w^2\left|\begin{matrix}0 & 0\\ -\frac12 & -\frac12\end{matrix}\right.\right)}{G^{22}_{22}\left(w^2\left|\begin{matrix}-\frac12 & \frac12\\ -1 & 0\end{matrix}\right.\right)} \\ 1 + \dfrac{\pi}{6}\dfrac{T\Gamma}{\Delta}\ln\dfrac{16}{T} \qquad (T \ll 1) \\ 1 + \dfrac{\Gamma}{\Delta}\dfrac{4\pi w}{3(1+w^2)} \end{cases}$$

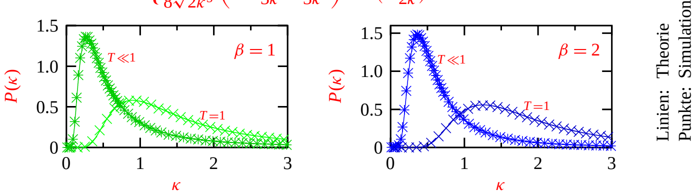


Für $\beta = 1$: nichtanalytische Abhängigkeit des Mittelwertes von T
Für $\beta = 2$: analytische Abhängigkeit des Mittelwertes von T

Resummierung in Γ $\Rightarrow$ Verteilungsfunktion von K:

Skalierter Petermannfaktor $\kappa = (K-1)\Delta/\Gamma T$, $P(\kappa)$ berechenbar für beliebiges $T \in [0;1]$.

$$\text{Grenzfälle: } P(\kappa) = \begin{cases} \dfrac{4\beta\pi^{2\beta}}{3\kappa^{2+3\beta/2}}\exp\left(-\dfrac{\beta\pi}{\kappa}\right) & T = 1,\ \beta \text{ beliebig} \\ \dfrac{\pi}{12\kappa^2}\left(1 + \dfrac{\pi}{2\kappa}\right)\exp\left(-\dfrac{\pi}{4\kappa}\right), & T \ll 1,\ \beta = 1 \\ \dfrac{\pi}{8\sqrt{2\kappa^5}}\left(1 + \dfrac{2\pi}{3\kappa} + \dfrac{\pi^2}{3\kappa^2}\right)\exp\left(-\dfrac{\pi}{2\kappa}\right) & T \ll 1,\ \beta = 2 \end{cases}$$



Mehrere offene Moden

Analytische Ergebnisse sind nur für $\beta = 2$ bekannt.

Verteilungsfunktion für beliebige Mode:

$$P(\Gamma) = \frac{\pi}{\Delta}\mathcal{F}_1\left(\frac{\pi}{\Delta}\Gamma\right)\mathcal{F}_2\left(\frac{\pi}{\Delta}\Gamma\right)$$

$$\mathcal{F}_1(y) = \frac{1}{(N-1)!}y^{N-1}\mathrm{e}^{-y}$$

$$\mathcal{F}_2(y) = \sum_{n=0}^{N}(-1)^n\binom{N}{n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\left(\frac{\sinh y}{y}\right)$$

Exponentiell unterdrückt unterhalb von: $\Gamma_0 = N\Delta/2\pi$

Typischer Wert für lasende Mode: $\Gamma < \Gamma_0$ aber $|\Gamma - \Gamma_0| \ll \sqrt{N}\Delta$

Weder Beschränkung auf kleine noch auf große Γ möglich!

Supersymmetrie $\Rightarrow$ mittlerer Petermannfaktor:

N beliebig:

$$\langle K\rangle_{\Omega,\Gamma} = 1 + \frac{2S(\pi\Gamma/\Delta)}{\mathcal{F}_1(\pi\Gamma/\Delta)\mathcal{F}_2(\pi\Gamma/\Delta)}$$

mit $S(y) = \sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{n!}y^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n}\left[\mathrm{e}^{-y}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\sinh y}{y}\right)\right]$

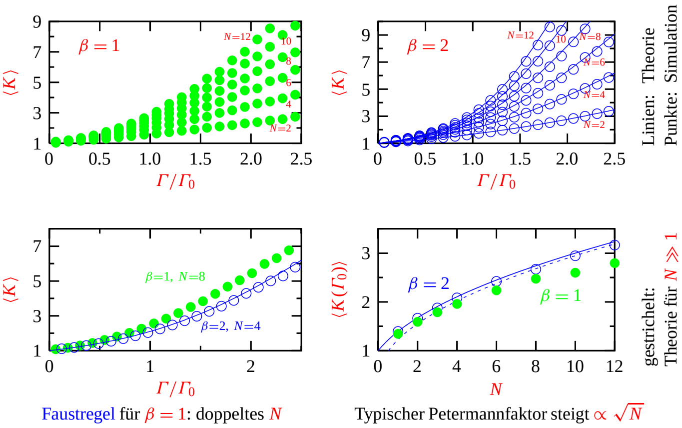
$N \gg 1$:

$$\langle K\rangle_{\Omega,\Gamma} = \sqrt{2N}[F(u)+u] + F(u)\left[(3-g)u + \tfrac43 u^3 + \tfrac43(1+u^2)F(u)\right]$$

$$F(u) = \frac{\exp(-u^2)}{\sqrt{\pi}[1+\mathrm{erf}(u)]} \qquad u \equiv \sqrt{\tfrac{N}{2}}\left(\tfrac{\Gamma}{\Gamma_0} - 1\right)$$

$N \gg 1$, $\Gamma = \Gamma_0$:

$$\langle K\rangle_{\Omega,\Gamma=\Gamma_0} = \sqrt{\frac{2N}{\pi} + \frac{4}{3\pi}}$$



Faustregel für $\beta = 1$: doppeltes N

Typischer Petermannfaktor steigt $\propto \sqrt{N}$

Kontakt: patra@lorentz.leidenuniv.nl http://www.lorentz.leidenuniv.nl/~patra/