

Bifurkationsanalyse von Stromoszillationen in Halbleiterübergittern

Studienarbeit*

Michael Patra

16. Februar 1995

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	1
2	Randbedingungen	3
3	Klassifizierung von Zuständen	6
3.1	Stationäre Zustände	6
3.2	Instationäre Zustände	7
3.3	Probleme bei der Unterscheidung	8
4	Abhängigkeiten von Dotierung und Spannung	9
4.1	Stromdichte	9
4.2	Phasenportrait	12
4.3	Eigenwerte	12
A	Parameter der Berechnungen	18

1 Zielsetzung

Halbleiter-Übergitter werden seit etwa 1970 behandelt, zuerst wegen der Möglichkeit des Auftretens von Bereichen mit negativer differentieller Leitfähigkeit. Diese kann

*Angefertigt am Institut für Theoretische Physik der Technischen Universität Berlin in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr. E. Schöll

zur Ausbildung von Felddomänen innerhalb des Übergitters führen, die sich in der Kennlinie durch Auftreten einer großen Zahl von Ästen niederschlägt. Experimentell wurde weiterhin Multistabilität beobachtet, u. a. in [8] (Abb. 1). Nachdem die Existenz gedämpfter Schwingungen schon länger bekannt war, konnten dann auch ungedämpfte Schwingungen beobachtet werden [7] (Abb. 2).

Das in dieser Studienarbeit verwendete Modell zur Beschreibung dieser Phänomene wurde in [1] entwickelt und dann z. B. in [2], [4] und [3] weiterentwickelt. Es berücksichtigt zwei Energieniveaus in jedem Quantentopf und leitet die Rategleichung von physikalischen Prozessen der Elektronen ab. Ein einfacherer Ansatz wurde von Bonilla et al. gewählt, der sich auf ein einziges Energieniveau innerhalb der Quantentöpfe beschränkt und die für die Übergänge phänomenologische Ansätze verwendet. Während auf diese Weise in [6] nur gedämpfte Schwingungen erhalten wurden, wurde dieses Modell in [7] auch zur Erklärung ungedämpfter Schwingungen verwendet. Die in [5] beschriebenen Schwingungen beruhen dagegen primär auf der (parasitären) Kapazität der Quantentöpfe gegeneinander.

Bisher wurden, insbesondere beim verwendeten Modell aus [1], die beobachteten ungedämpften Schwingungen und ihr Entstehen noch nicht systematisch untersucht. Insbesondere ist hierunter zu verstehen, bei welchen angelegten Spannungen und bei welchen Dotierkonzentrationen ungedämpfte Schwingungen auftreten¹, als auch wel-

¹In den Arbeiten von Bonilla (z. B. [7]) wird ein so einfaches Modell verwendet, daß diese Frage

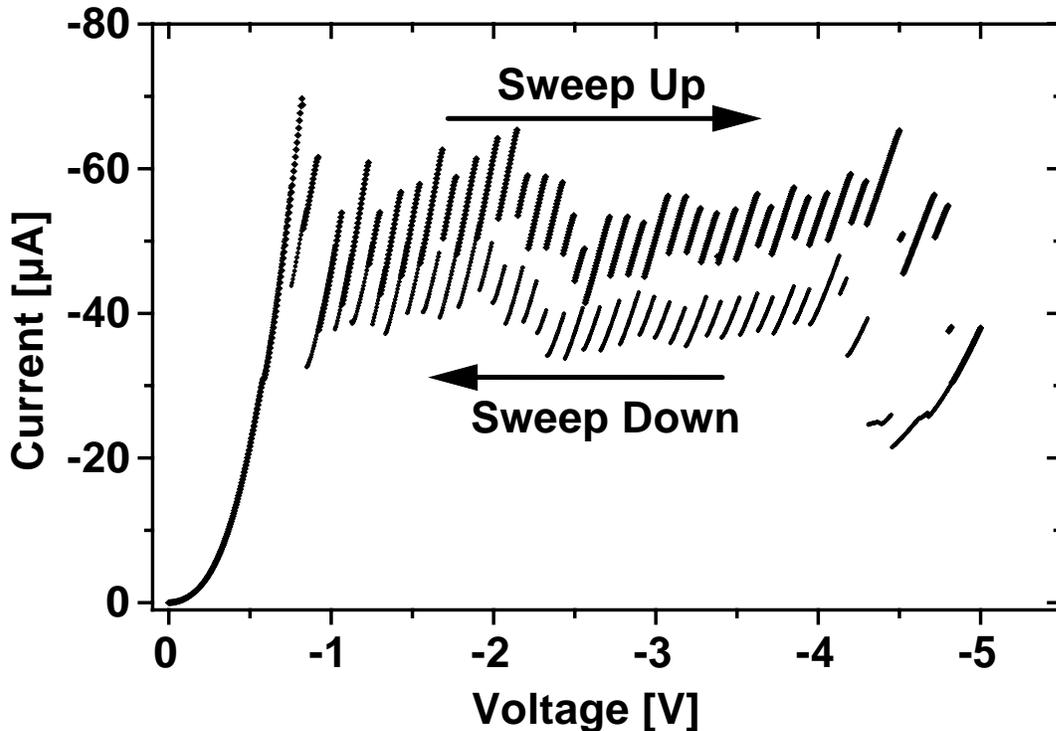


Abbildung 1: Multistabilität in der Kennlinie eines Halbleiterübergitters [8]. Die Kennlinie wurden an einem GaAs-AlAs-Übergitter mit 40 Perioden ($90 \text{ \AA} / 40 \text{ \AA}$) und einer Dotierung von $N_D = 1,67 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ gemessen.

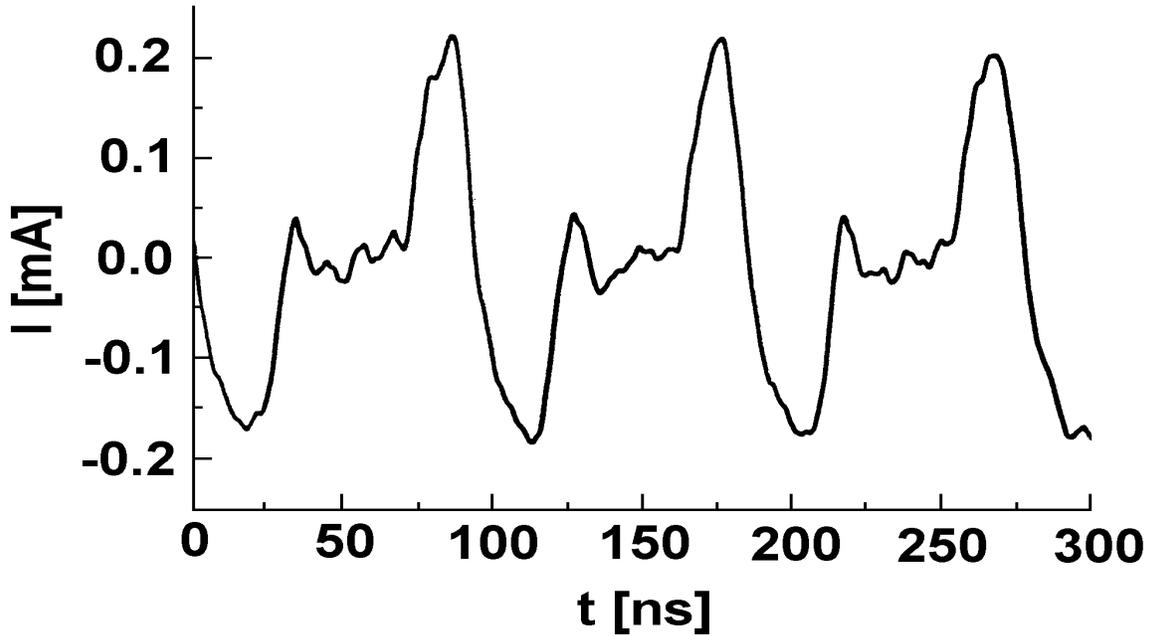


Abbildung 2: Experimentell gemessene, ungedämpfte Schwingung [7]. Sie wurde bei $U = 7\text{ V}$ an einem GaAs-AlAs-Übergitter mit 40 Perioden ($90\text{ \AA} / 40\text{ \AA}$) und einer Dotierung von $N_D = 9,3 \cdot 10^{16}\text{ cm}^{-3}$ bestimmt.

chem Bifurkationsmechanismus der Übergang zwischen einem stationären Stromfluß und Oszillationen bei Veränderung von Spannung und/oder Dotierungskonzentration beruht.

2 Randbedingungen

In dem hier verwendeten Modell aus [1] gibt es keine physikalische Begründung für die vorgenommene Wahl der Randbedingungen. Eine solche wird auch in dieser Arbeit nicht entwickelt, allerdings sollen exemplarisch einige verschiedene Randbedingungen an Hand der damit berechneten Kennlinien verglichen werden. Die Wahl der Randbedingungen ist insbesondere deswegen wichtig, weil das Verhalten dynamischer Systeme erheblich durch die Randbedingungen beeinflusst wird.

Praktisch werden die Randbedingungen in einem System aus n Quantentöpfen durch Hinzufügen zweier Quantentöpfe mit den Indizes 0 und $n + 1$ realisiert, in denen die Elektronendichten nicht durch die normale Dynamik, sondern durch eine besondere Vorschrift bestimmt sind. Die Elektronendichten in den Quantentöpfen 0 und $n+1$ werden im allgemeinen von denen in den angrenzenden Quantentöpfen 1 und n abhängen. Einfachster (und von den angrenzenden Quantentöpfen am stärksten abhängiger) Ansatz ist das Duplizieren der Elektronendichten:

$$\begin{aligned} n_1^0 &= n_1^1 & n_1^{n+1} &= n_1^n \\ n_2^0 &= n_2^1 & n_2^{n+1} &= n_2^n \end{aligned}$$

dort unmittelbar beantwortbar ist

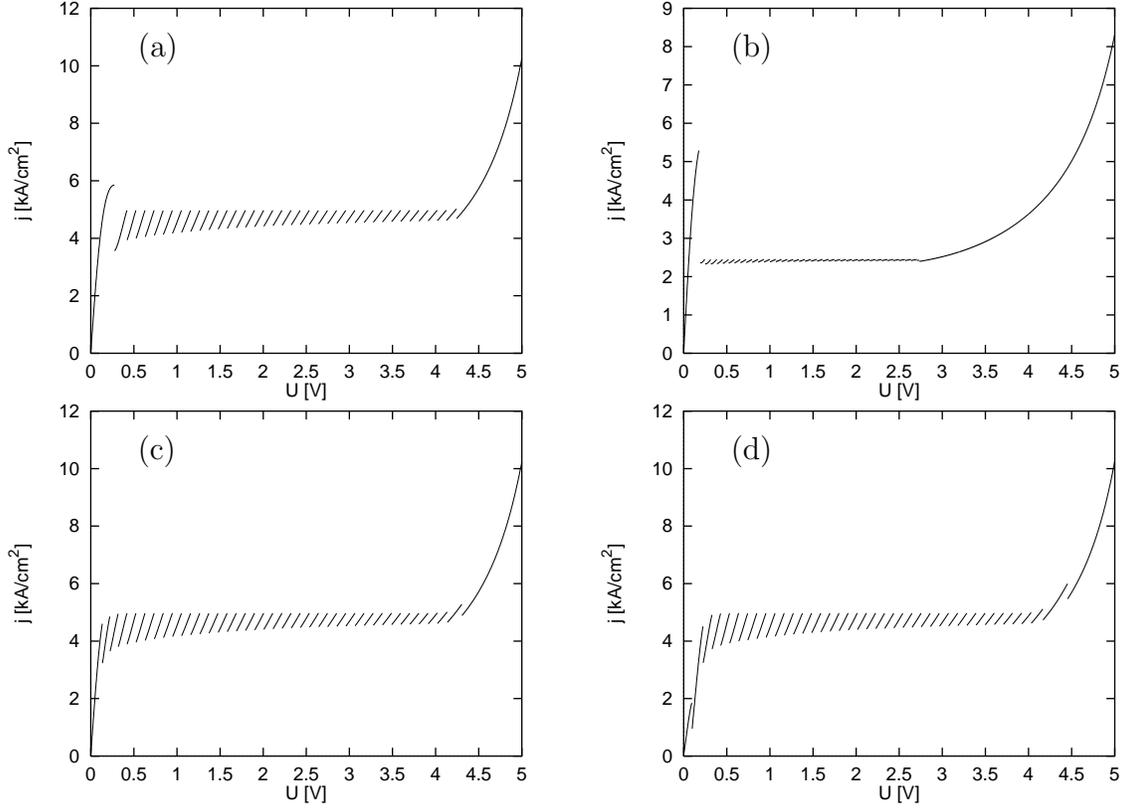


Abbildung 3: Berechnete Kennlinien für verschiedene Randbedingungen **(a)** Duplizieren des jeweils letzten Quantentopfs, **(b)** Festhalten auf einfacher Dotierungskonzentration, **(c)** Doppelte Dotierungskonzentration, **(d)** Fünffache Dotierungskonzentration

Diese Randbedingungen wurden auch in den bisher erwähnten Arbeiten verwendet, da diese das Auftreten eines Zustandes mit homogener Feldverteilung gewährleisten.

Das andere Extrem ist das Festsetzen der Elektronendichten in den Quantentöpfen 0 und $n + 1$ auf einen von den Elektronendichten in den benachbarten Quantentöpfen vollkommen unabhängigen Wert. Dieser wird zweckmäßigerweise als Vielfaches der Dotierungskonzentration ausgedrückt. Speziell wurde im folgenden nachstehender Ansatz verwendet:

$$\begin{aligned} n_1^0 &= \lambda \cdot N_D & n_1^{n+1} &= \lambda \cdot N_D \\ n_2^0 &= 0 & n_2^{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

Abbildung 3 zeigt einige berechnete Kennlinien², die sich nur in den Randbedingungen, nicht aber in den sonstigen Systemparametern unterscheiden. Die grundlegenden Eigenschaften der Kennlinie sind bei allen Randbedingungen identisch, insbesondere das Auftreten von (ungefähr) 40 Ästen. Die „einfachste“ Form hat die Kennlinie (c),

²Unter dem Begriff „Kennlinie“ soll im folgenden diejenige Kurve im Strom-Spannungs-Diagramm verstanden werden, die man erhält, wenn man die Spannung von 0 auf einen vorgegebenen Maximalwert hochfährt. Die „eigentliche“ Kennlinie ist in Abb. 4 dargestellt.

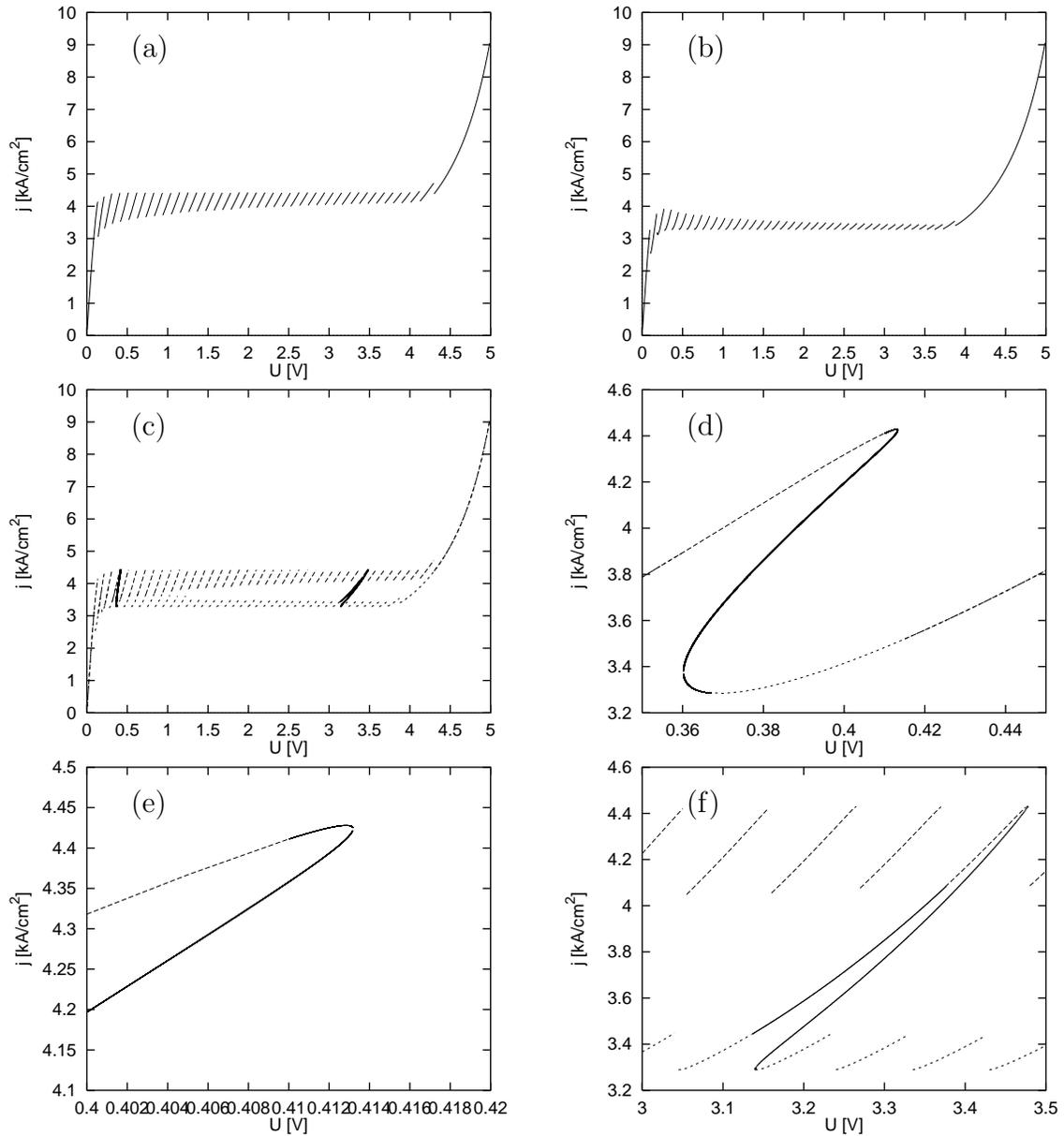


Abbildung 4: Instabile Äste der Kennlinie: (a) Upsweep, (b) Downsweep, (c) Up- und Downsweep mit zwei exemplarischen, instabilen Ästen, (d) und (e) Vergrößerung des linken instabilen Astes, (e) Vergrößerung des rechten instabilen Astes. Nur die rechte der beiden eingezeichneten Verbindungen ist instabil, die linke kann durch geeignetes Herauf- und wieder Herunterfahren der an das Übergitter angelegten Spannung erreicht werden.

bei der die Elektronendichte im unteren Niveau auf den konstanten Wert $2 \cdot N_D$ gesetzt wurde.³ Diese wurde dann auch für alle weiteren Berechnungen verwendet. Es sei aber noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß diese Wahl der Randbedingungen keinesfalls zwingend ist.

3 Klassifizierung von Zuständen

Erstes Ziel dieser Arbeit ist die Erstellung eines Phasenportraits, in dem für jeden Parameterwert (d. h. jedes Paar von Spannung und Dotierungskonzentration) abzulesen ist, welche Art von Zustand das System annehmen kann. Einfachste und grundlegende Unterscheidung ist die zwischen *stationären* und *instationären* Zuständen.⁴ Zu einem stationären Zustand gehört ein *stabiler Fixpunkt*, zu einem instationären Zustand ein stabiler Grenzzyklus, ein chaotischer Attraktor o. ä. Wird in der „Nähe“ der Bahn im Phasenraum ein Fixpunkt gefunden, so sollte dieser ein *instabiler Fixpunkt* sein.⁵ Ein solcher Fixpunkt kann nicht durch Ausintegrieren der Dynamik, sondern nur direkt durch Suchen der Nullstellen der Übergangsraten gefunden werden.

3.1 Stationäre Zustände

Stationäre Zustände können durch Betrachtung der räumlichen Feldverteilung in zwei verschiedene Gruppen unterteilt werden, nämlich in *homogene* und *inhomogene* Zustände. Als inhomogen wird im folgenden ein Zustand bezeichnet, wenn sich die elektrische Feldstärke an den beiden Enden⁶ sowohl absolut als auch relativ um ein vorgegebenes Maß unterscheiden.⁷

Abbildung 5 zeigt für zwei verschiedene Dotierungen die Abhängigkeit der elektrischen Feldstärke von Spannung und Ort innerhalb des Übergitters. Man erkennt insbesondere in Abb. 5(b) die Ausbildung einer Hochfelddomäne, die mit steigender Spannung einen immer größeren Teil des Übergitters einnimmt. Bei geringerer Konzentration wie z. B. in Abb. 5(a) ist die Grenze der Hochfelddomäne nicht mehr so eindeutig lokalisierbar. Oberhalb einer gewissen Spannung (ca. 4 – 5 V) bildet sich eine homogene Feldverteilung aus. Dies ist als Überschreitung der Grenzen des verwendeten Modells zu interpretieren, der nur durch Einführung weiterer höherliegender Energieniveaus abgeholfen werden kann. Die Spannung, bei der dieser Übergang stattfindet, ist gut definiert. Bei sehr kleinen Spannungen sind auch das elektrische Feld und damit die räumlichen Unterschiede des elektrischen Feldes sehr klein. Man kann die Feldverteilung daher auch

³Es stellt sich immer noch die Frage der Aufteilung der Elektronen auf die beiden Energieniveaus. Es ergibt sich jedoch, daß „vernünftige“ Werte (hier bis zu einem Drittel der Dichte im unteren Niveau) für die Konzentration im zweiten Energieniveau zu keiner Veränderung der Kennlinie führen.

⁴Es soll hier von Einschwingvorgängen abgesehen werden

⁵Ansonsten wäre Multistabilität zwischen stationären und instationären Verhalten zu erwarten.

⁶Um der Überbewertung von Randeffekten vorzubeugen, wird die Feldstärke in der zweiten und in der vorletzten Barriere betrachtet.

⁷Die Feldstärke an einem Ende muß mindestens doppelt so groß sein wie am anderen Ende; zusätzlich muß sie mindestens 10^6 V/m größer sein.

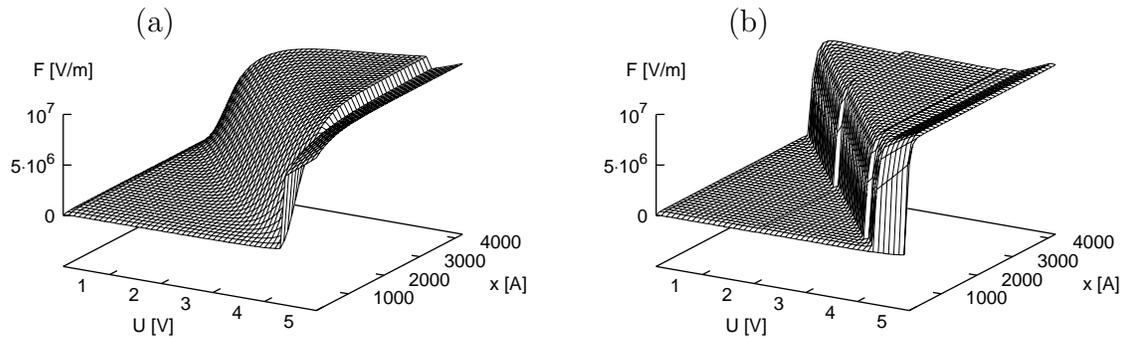


Abbildung 5: Feldverteilung innerhalb des Übergitters für die Dotierungskonzentrationen **(a)** $N_D = 3,5 \cdot 10^{16} \text{cm}^{-3}$, **(b)** $N_D = 6,0 \cdot 10^{17} \text{cm}^{-3}$. Für instabile Zustände ist die Feldverteilung am instabilen Fixpunkt dargestellt.

in diesem Fall als homogen ansehen. Hierbei ist die Wahl der Grenzbedingung zwischen homogener und inhomogener Feldverteilung etwas willkürlich.⁸

Zusätzlich erkennt man insbesondere in Abb. 5(b) den Mechanismus, der eine Kennlinie mit (ungefähr) einem Ast pro Quantentopf hervorruft: Es bildet sich eine Hochfelddomäne, die mit steigender Spannung einen immer größeren Bereich des Halbleiterübergitters einnimmt. Wird ein weiterer Quantentopf von der Hochfelddomäne erfaßt, so kommt es zu einem Sprung in der Kennlinie. Bei kleinerer Dotierungskonzentration wie in Abb. 5(a) kann in einem einzelnen Quantentopf nicht genügend Ladung zur Ausbildung einer Hochfelddomäne angesammelt werden. Als Folge davon verschmiert die Grenze der Hochfelddomäne.

3.2 Instationäre Zustände

Die grundlegendste Unterscheidung ist die zwischen periodischen und chaotischen Zuständen. Die periodischen Zustände können dann z. B. weiter in harmonische und anharmonische („Spiking“) Oszillationen unterteilt werden.

In Abbildung 6(a) ist eine typische Oszillation dargestellt. Diese ist praktisch vollständig harmonisch, wie auch das Fourierspektrum in Abb. 6(b) zeigt. Sämtliche (bei den verwendeten Randbedingungen) beobachteten Oszillationen sind von dieser Form. Anharmonische Oszillationen oder chaotisches Verhalten wurden nicht gefunden, so daß sich eine weitere Diskussion hierüber erübrigt. Aus Abb. 6(c) ergibt sich, daß die Stromoszillationen durch ein Wandern der Grenze der Hochfelddomäne hervorgerufen werden.

⁸Wird als Randbedingung das Duplizieren der Elektronenkonzentration im letzten Quantentopf verwendet, so kann sich ein „echter“ homogener Zustand ausbilden [2].

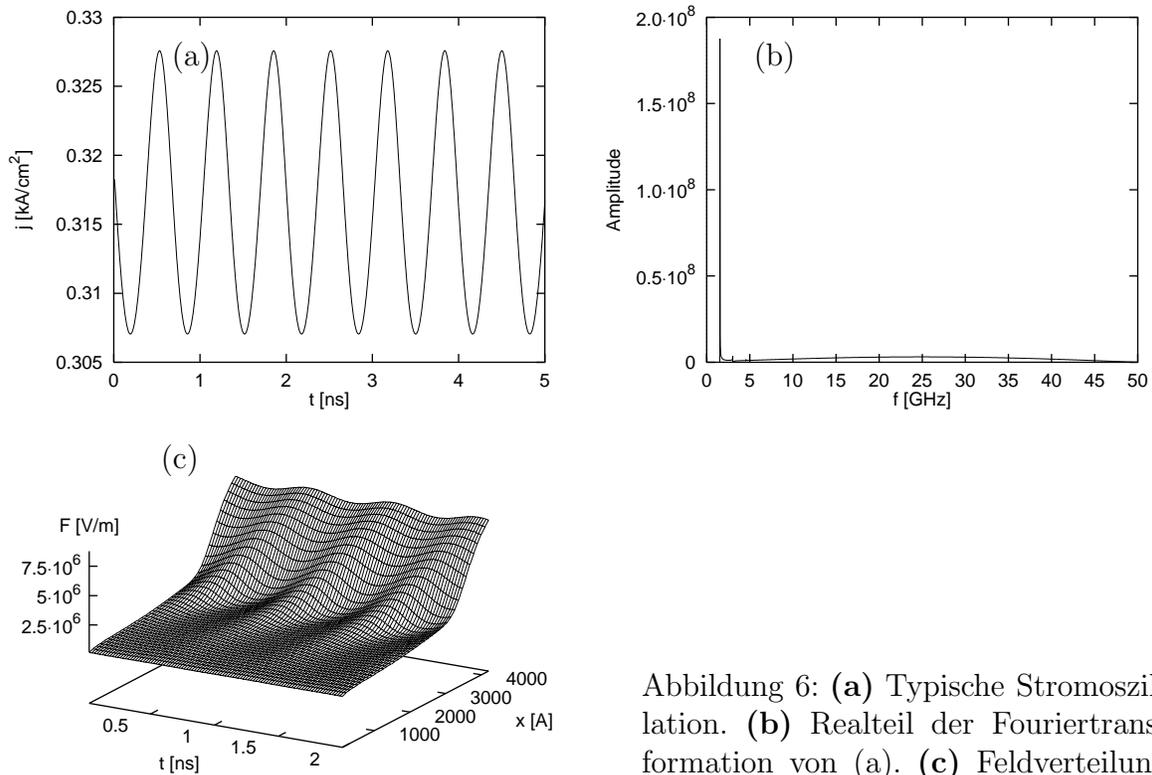


Abbildung 6: (a) Typische Stromoszillation. (b) Realteil der Fouriertransformation von (a). (c) Feldverteilung während des Oszillierens.

3.3 Probleme bei der Unterscheidung

Technisch geschieht das Bestimmen der Dynamik des Systems durch Ausintegrieren von Differentialgleichungen. Fallen im Verlauf des Ausintegrierens alle Übergangsraten unter einen bestimmten Wert, so wird man das System als stationär ansehen. Da beim Auftreten ungedämpfter Schwingungen das Ausintegrieren niemals abbrechen würde, ist spätestens nach einer gewisser Dauer abzubrechen; man wird das System dann als instationär bezeichnen. Es sind jetzt zwei Probleme denkbar:

- Ein Zustand mit zeitlichem Spiking könnte in seiner „ruhigen“ Phase als stationär erkannt und damit das weitere Ausintegrieren der Differentialgleichungen abgebrochen werden, obwohl beim Fortsetzen der Integration die Übergangsraten später wieder ansteigen würden.
- In der Nähe eines Übergangs zwischen stationären und instationären Zuständen dauern die Einschwingvorgänge sehr lange. Bei vorgegebenen maximalem Rechenaufwand wird daher unter Umständen der stationäre Punkt beim Ausintegrieren nicht erreicht und der betreffende Zustand als instationär erkannt.

Ein denkbarer Ansatz ist die Betrachtung der Eigenwerte der Jacobi-Matrix am (gegebenenfalls erst durch ein anderes Verfahren zu findenden) stationären Punkt. In dieser Arbeit ergab sich, daß alle durch Integration der Dynamik gefundenen stationären Zustände nur negative Eigenwerte besitzen, Spiking also nicht auftritt.

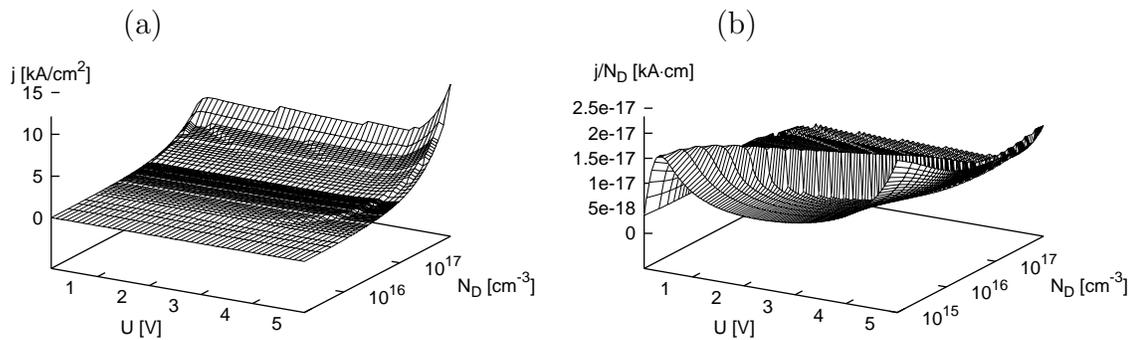


Abbildung 7: (a) Stromdichte j im Halbleiterübergitter als Funktion von Spannung U und Dotierungskonzentration N_D . (b) Normierte Stromdichte $\frac{j}{N_D}$.

4 Abhängigkeiten von Dotierung und Spannung

4.1 Stromdichte

In Abbildung 7(a) ist die Abhängigkeit der Stromdichte von Spannung und Dotierung dargestellt.⁹ Wie zu erwarten war, steigt die Stromdichte mit der Dotierung und der Spannung an, wobei in einem weiten Bereich der Spannung die Stromdichte beinahe unverändert bleibt, um dann bei hohen Spannung stark anzusteigen. Dies entspricht Abb. 3(c), wenn man berücksichtigt, daß die Spannungsauflösung von Abb. 7(a) nicht hoch genug ist, um einzelne Äste auflösen zu können.

Um besondere Strukturen erkennen zu können, wurde in Abb. 7(b) die Stromdichte durch die Dotierungskonzentration dividiert, da in erster Näherung zu erwarten ist, daß die Stromdichte linear mit der Dotierungskonzentration steigen wird. Man erkennt insbesondere bei kleinen Dotierungen Strukturen in der so normierten Stromdichte. Diese sind jedoch leicht zu erklären. Abb. 8 zeigt beispielhaft drei Kennlinien für kleine Dotierungen. Die Stromdichte fällt in Abb. 8(a) beim Übergang in den homogenen Zustand bei ca. 1 V zuerst wieder ab, um danach bei größeren Spannungen wieder anzusteigen. Das qualitativ selbe Verhalten zeigt Abb. 8(b), doch fällt die Kurve beim Übergang in den homogenen Zustand schneller ab. In Abb. 8(c) ist der Abfall bereits so stark, daß dieser als Sprung in der Kennlinie zu interpretieren ist. Wie im folgenden Abschnitt 4.2 gezeigt wird, wandert der Übergang zur homogenen Feldverteilung mit steigenden Dotierungen zu höheren Spannungen, wodurch die „Drift“ des „Walls“ erklärt werden kann.

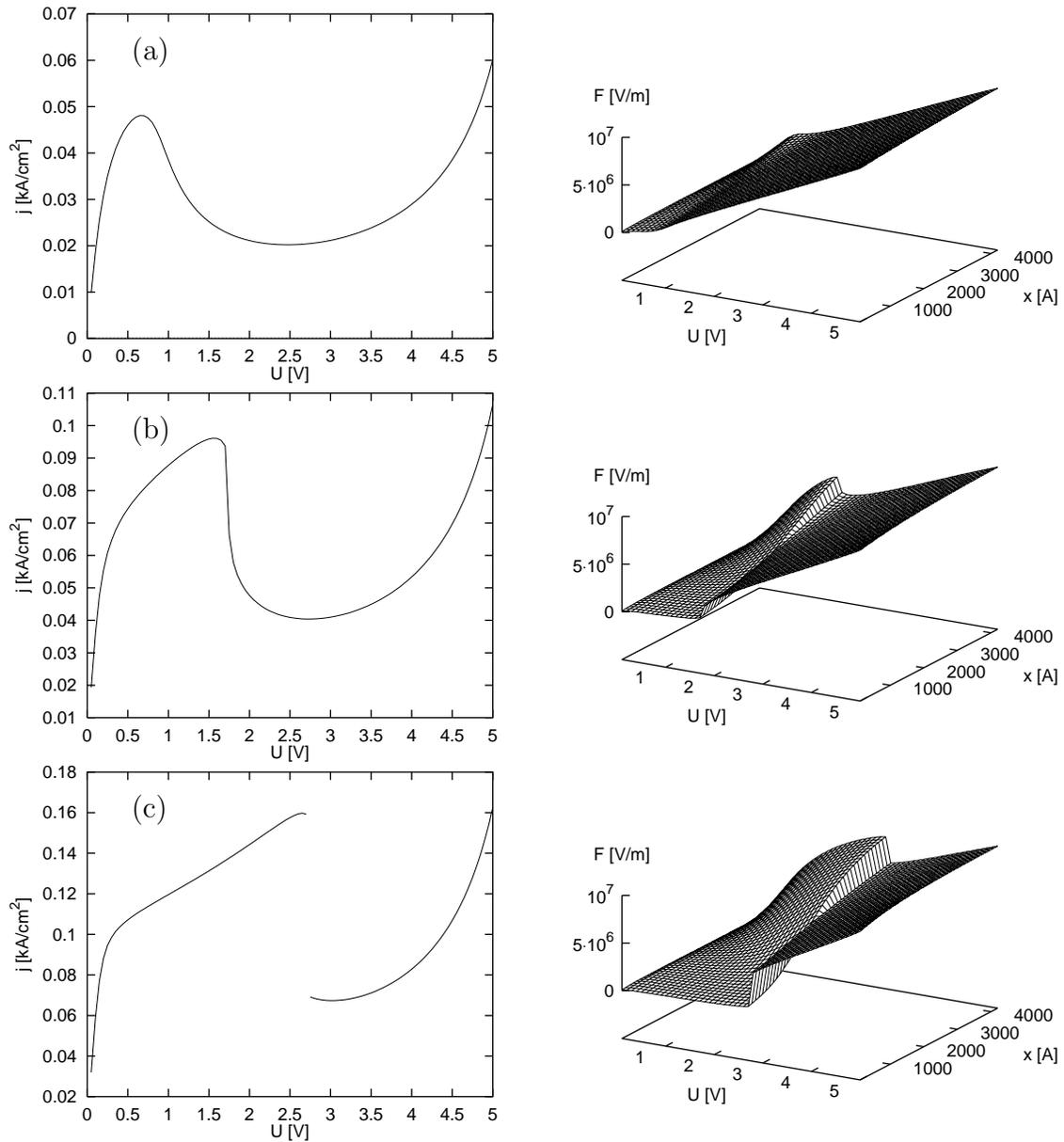


Abbildung 8: Kennlinien und Feldstärkeverteilung für kleine Dotierungen: (a) $N_D = 3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, (b) $N_D = 6 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$, (c) $N_D = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$.

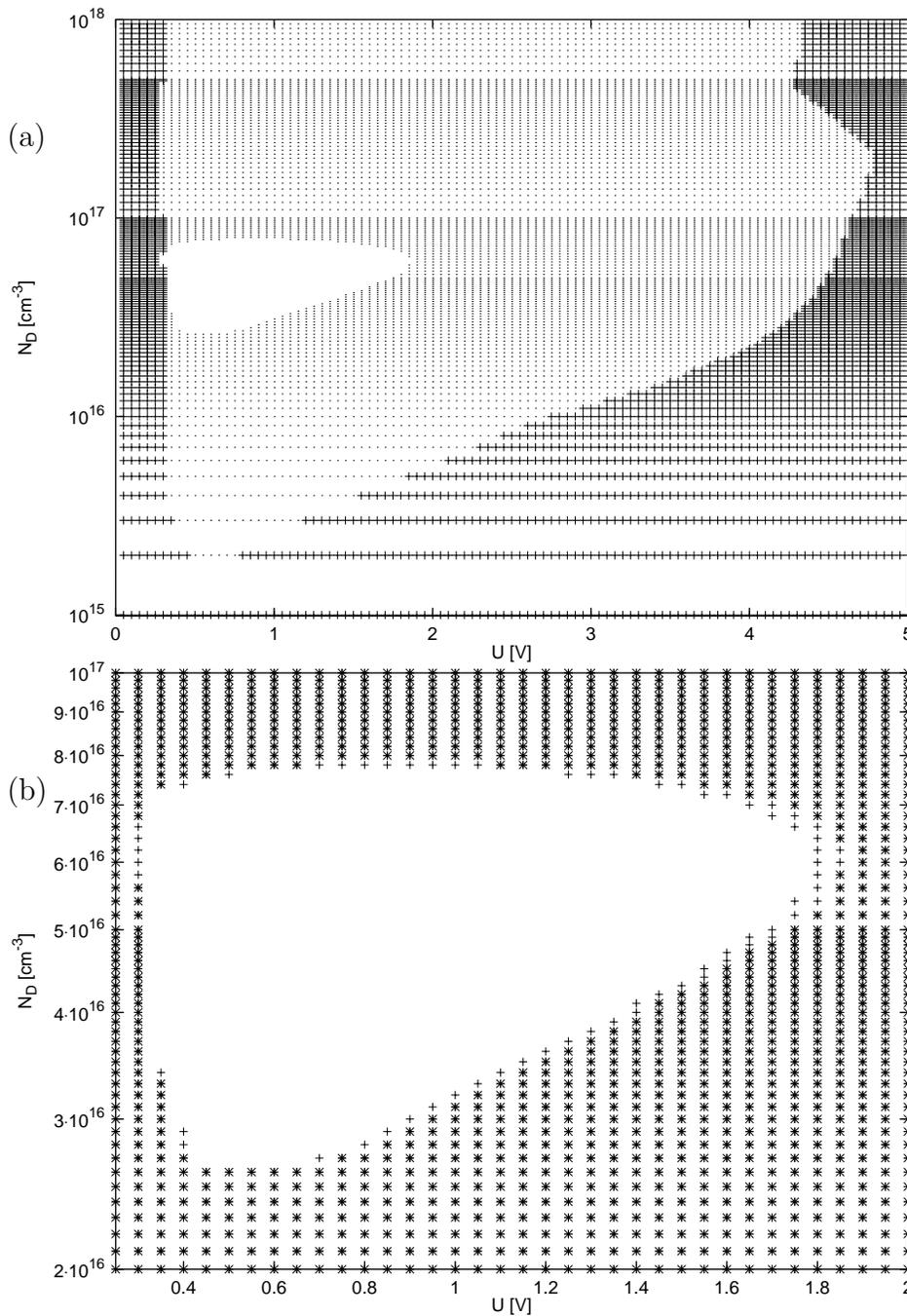


Abbildung 9: **(a)** Phasendiagramm; dunkel sind stationäre Zustände mit homogener Feldverteilung dargestellt, hell die mit inhomogener. Instationäre Zustände sind weiß belassen. **(b)** Ausschnitt des Phasendiagramms; durch Quadrate sind die als stationär erkannten Zustände dargestellt, durch Rauten diejenigen Zustände, die nur negative Eigenwerte besitzen. Bei erheblich längerem Ausintegrieren der Dynamik würden auch die in der Abbildung als instationär dargestellten Punkte mit nur negativen Eigenwerten als stationär erkannt werden. Dies wurde an einigen Punkten überprüft; es würde jedoch zu viel Rechenzeit benötigen, dies auch für die restlichen Punkte durchzuführen.

4.2 Phasenportrait

In Abbildung 9(a) ist das Phasendiagramm dargestellt. Man erkennt die Ausbildung eines stationären homogenen Zustands bei kleinen und bei großen Spannungen, dazwischen befinden sich Zustände mit inhomogener Feldverteilung. Bei kleinen Dotierungskonzentrationen wird der Bereich inhomogener Feldverteilung immer kleiner, da mit abnehmender Dotierung die nötigen Elektronenkonzentrationen zur Ausbildung einer Hochfelddomäne immer schwerer erreicht werden können.

Bei Dotierungskonzentrationen im Bereich von ungefähr $3 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ bis $8 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ und Spannungen zwischen 0,25 V und 1,75 V kommt es zur Bildung instationärer Zustände. Diese bilden im Phasenportrait einen Bereich ohne besondere Merkmale wie Zacken usw. Wie bereits im Abschnitt 3.3 erwähnt, ist es denkbar, daß auf Grund zu frühen Abbrechens des Ausintegrierens in Wirklichkeit stationäre Zustände als instationär erkannt werden. Deswegen wurden in Abb. 9(b) zum einen alle als stationär erkannten Zustände als Quadrate dargestellt, zum anderen alle Zustände, die nur negative Eigenwerte besitzen, als Rauten. Man erkennt, daß alle als stationär erkannten Zustände nur negative Eigenwerte besitzt; andererseits gibt es an den Rändern des instationären Bereichs eine Reihe von Zuständen, die ebenfalls nur negative Eigenwerte besitzen. Dies ist so zu interpretieren, daß bei einem weiteren Ausintegrieren ein stationärer Zustand erreicht worden wäre.¹⁰ Der so erhaltene Bereich der „wirklich“ instationären Zustände ist noch etwas regelmäßiger geformt als der ursprüngliche, insbesondere fehlen die kleinen Ausbuchtungen links oben und rechts.

4.3 Eigenwerte

Wichtig zur Beurteilung der Dynamik ist der Eigenwert mit dem größten Realteil. Ist dessen Realteil positiv, so ist der zugehörige Fixpunkt instabil; ist dessen Realteil negativ, so ist er stabil. Im ersten Fall wird es zur Ausbildung chaotischen oder oszillatorischen Verhaltens kommen (wenn kein anderer, stabiler Fixpunkt vorhanden ist); im zweiten Fall gibt es eine stationäre Lösung. Ist der Imaginärteil von Null verschieden, so muß es sich um ein paar konjugiert komplexer Eigenwerte handeln, da die Jacobi-Matrix reell ist. Wie später gezeigt wird, sind die Imaginärteile im relevanten Parameterbereich von Null verschieden.

Abbildung 10(a) zeigt den jeweils größten Realteil der Eigenwerte in Abhängigkeit von Spannung und Dotierungskonzentration. Zu beachten ist, daß betragsmäßig viel größere negative als positive Eigenwerte existieren, wie auch die Abbildungen 11(c) und 13(c) zeigen. Daher wurde in Abb. 10(b) der Bereich negativer Eigenwerte abgeschnitten.

⁹Bei instationären Zuständen wurde der zugehörige instabile Fixpunkt berechnet und die Stromdichte an diesem Punkt genommen.

¹⁰Sieht man sich die Stromdichte als Funktion der Zeit bei diesen Zuständen an, so erkennt man eine gedämpfte Schwingung. Man kann dann aber immer noch nicht mit Sicherheit sagen, ob die Amplitude dieser Schwingung im weiteren Verlauf beliebig klein wird oder gegen einen endlichen Wert konvergiert. Einige Datenpunkte wurden testweise erheblich länger ausintegriert; in allen Fällen wurde die Dynamik dann stationär.

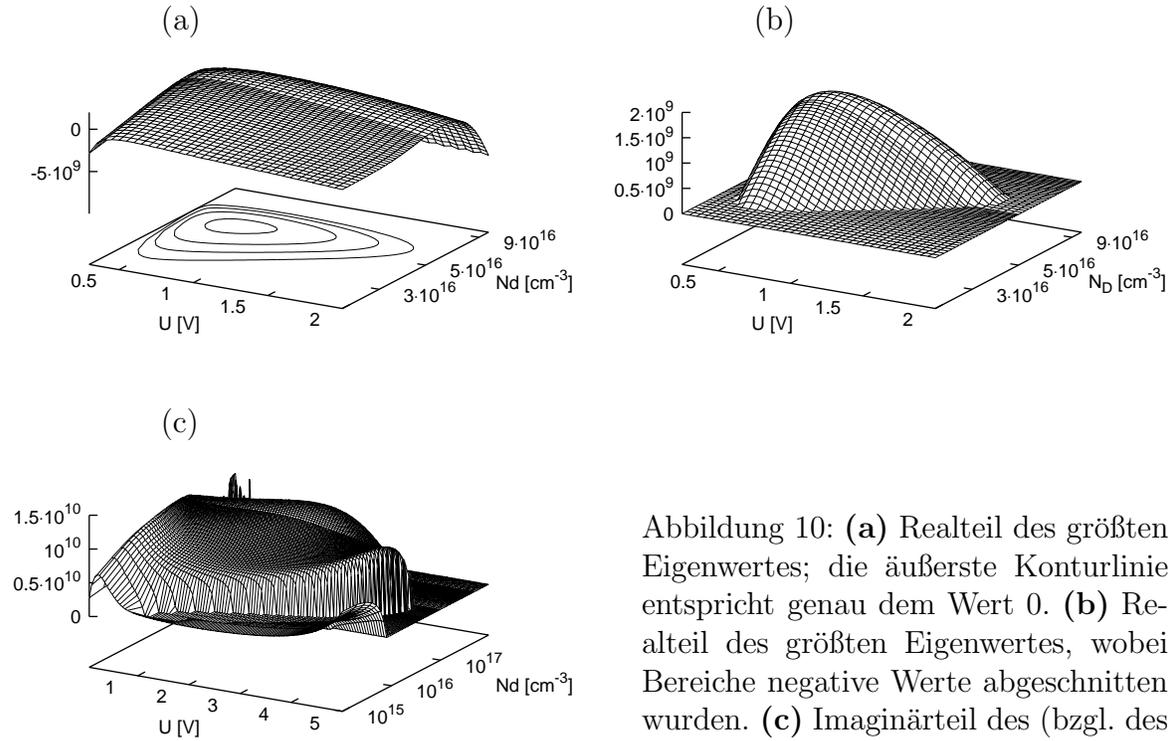


Abbildung 10: (a) Realteil des größten Eigenwertes; die äußerste Konturlinie entspricht genau dem Wert 0. (b) Realteil des größten Eigenwertes, wobei Bereiche negative Werte abgeschnitten wurden. (c) Imaginärteil des (bzgl. des Realteils) größten Eigenwertes.

Kommt es durch Veränderung der angelegten Spannung U oder der Dotierungskonzentration N_D zum Auftreten ungedämpfter Schwingungen, so ändert sich das Vorzeichen des Realteils des größten Eigenwertes. In Abb. 10(c) sind die dazugehörigen Imaginärteile dargestellt. Diese sind nur im Bereich homogener Feldverteilung bei hohen Spannungen Null, insbesondere also im Übergangsbereich zwischen stationären und instationären Zuständen. Der Sprung bei Erreichen des homogenen Zustands (vergleiche Abb. 5(a)) ist insbesondere in Abb. 11(e) gut zu erkennen.

Die Entstehung oszillierender Zustände geschieht also durch eine Hopf-Bifurkation.

Die Schwingungsfrequenz und der Imaginärteil des größten Eigenwertes werden in Abb. 11(f) in Abhängigkeit von der Spannung verglichen. Insbesondere am Rand des schwingenden Parameterbereichs, also bei kleinen Schwingungsamplituden und damit in der Nähe des instabilen stationären Punkts, stimmen die beiden Werte sehr gut überein. Die Oszillation wird also tatsächlich durch ein Schwingen um den ermittelten instabilen stationären Punkt hervorgerufen.

In Abbildung 11(a) ist die Abhängigkeit der Schwingungsamplitude von der Spannung dargestellt, in Abb. 12 eine genauere Berechnung für die linke Grenze. Der Anstieg folgt in guter Näherung einer Wurzelfunktion. Daher handelt es sich mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit um eine superkritische Hopf-Bifurkation.

Bei einer subkritischen Hopf-Bifurkation existieren in einem gewissen Parameterbereich gleichzeitig ein stabiler Grenzzyklus und ein stabiler Fixpunkt. Dies führt zu einer

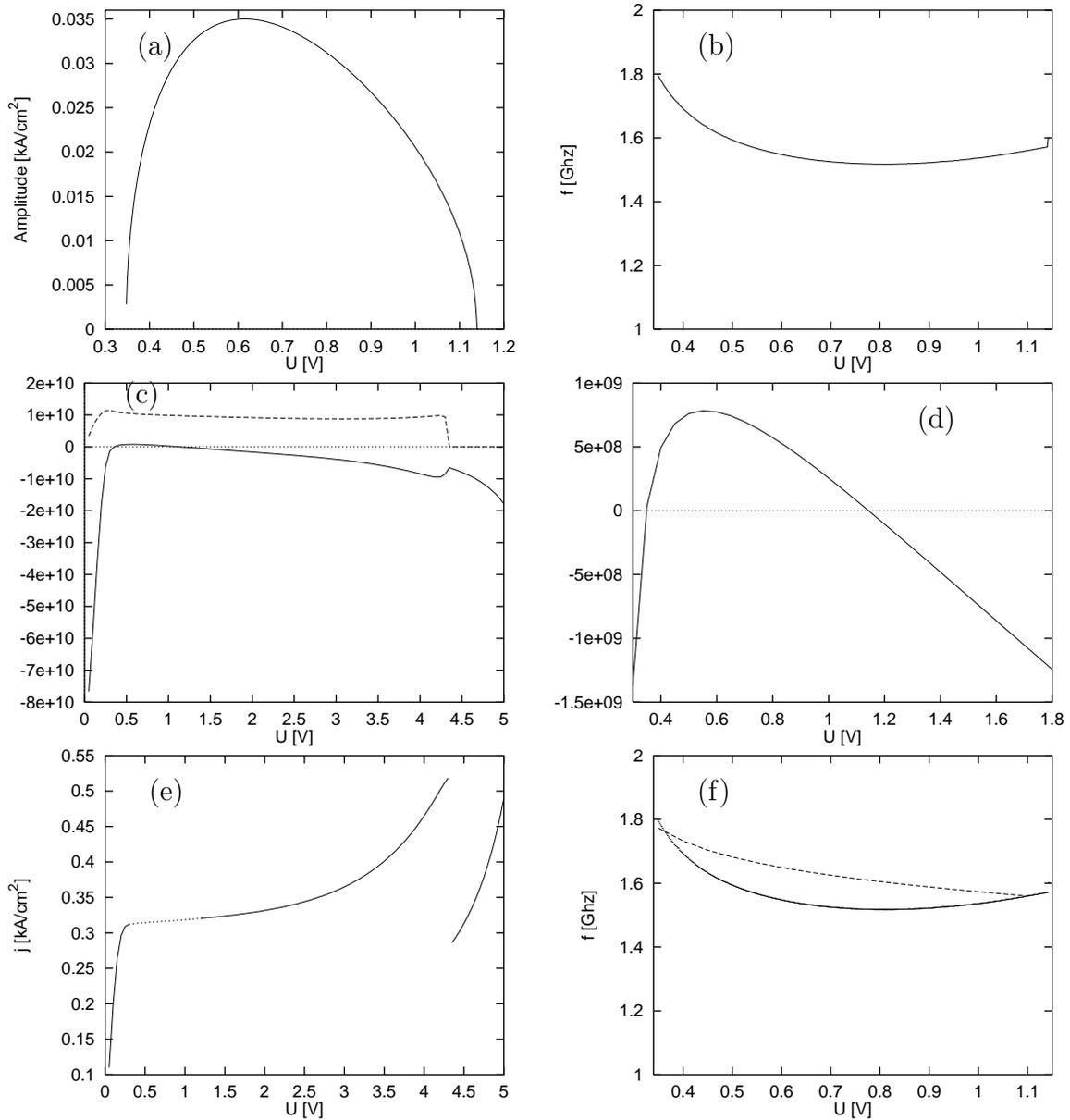


Abbildung 11: Eigenschaften bei konstanter Dotierung $N_D = 3,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. **(a)** Oszillationsamplitude, **(b)** Oszillationsfrequenz, **(c)** Real- und Imaginärteil (gestrichelt) des größten Eigenwertes am (gegebenenfalls instabilen) Fixpunkt, **(d)** Vergrößerung des Realteils, **(e)** Kennlinie für $N_D = 3,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$. Im instabilen Bereich wurde der instabile Fixpunkt berechnet und die Stromdichte an diesem Punkt gestrichelt dargestellt. **(f)** Imaginärteil (dividiert durch 2π zur Umrechnung von Winkelfrequenz in Frequenz, gestrichelt dargestellt) und Oszillationsfrequenz (durchgezogen).

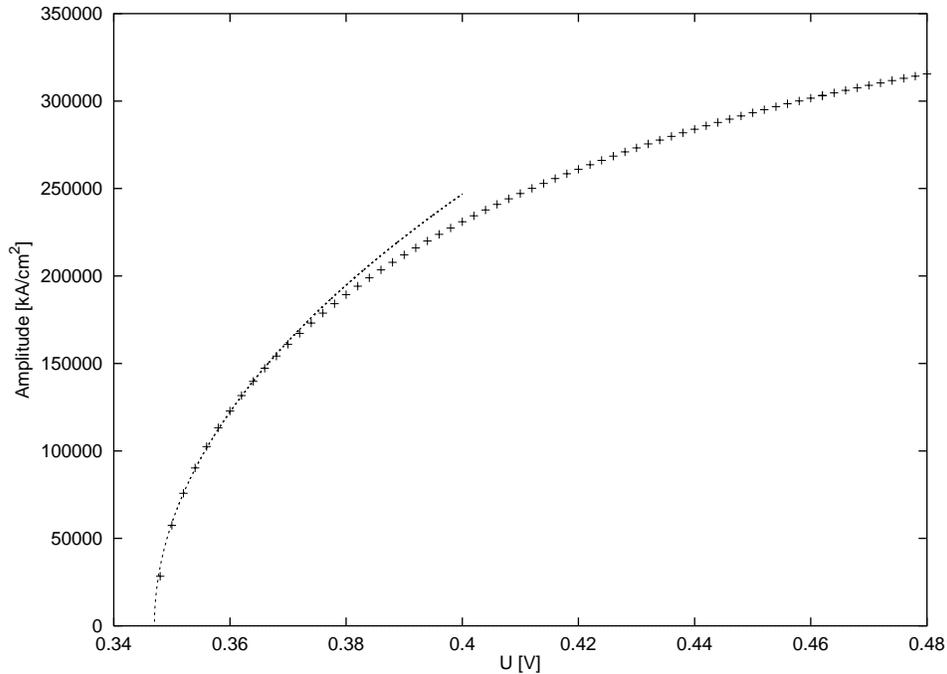


Abbildung 12: Schwingungsamplitude in Abhängigkeit von der Spannung bei konstanter Dotierung $N_D = 3,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ (Punkte). Die durchgezogene Linie ist eine an die ersten zehn Datenpunkte angepaßte Wurzelfunktion.

Hysterese für den Punkt, an dem Oszillationen einsetzen. Dies wurde beispielhaft für die beiden Dotierungen $N_D = 3,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ und $N_D = 7,0 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ untersucht. Dabei ergab sich, daß keinerlei Effekte bei Verwendung von Spannungsintervallen von 1 mV auftreten. Eine weitere Verkleinerung dieser Schranke ist nicht sinnvoll, da die nötige Rechenzeit, um Einschwingeffekte auszuschließen, in der Nähe der Grenze sehr stark ansteigt. Weiterhin steigen die betreffenden Schwingungsamplituden etwa wie eine Wurzelfunktion an, was ebenfalls für eine superkritische Hopf-Bifurkation spricht (Abb. 4.3).

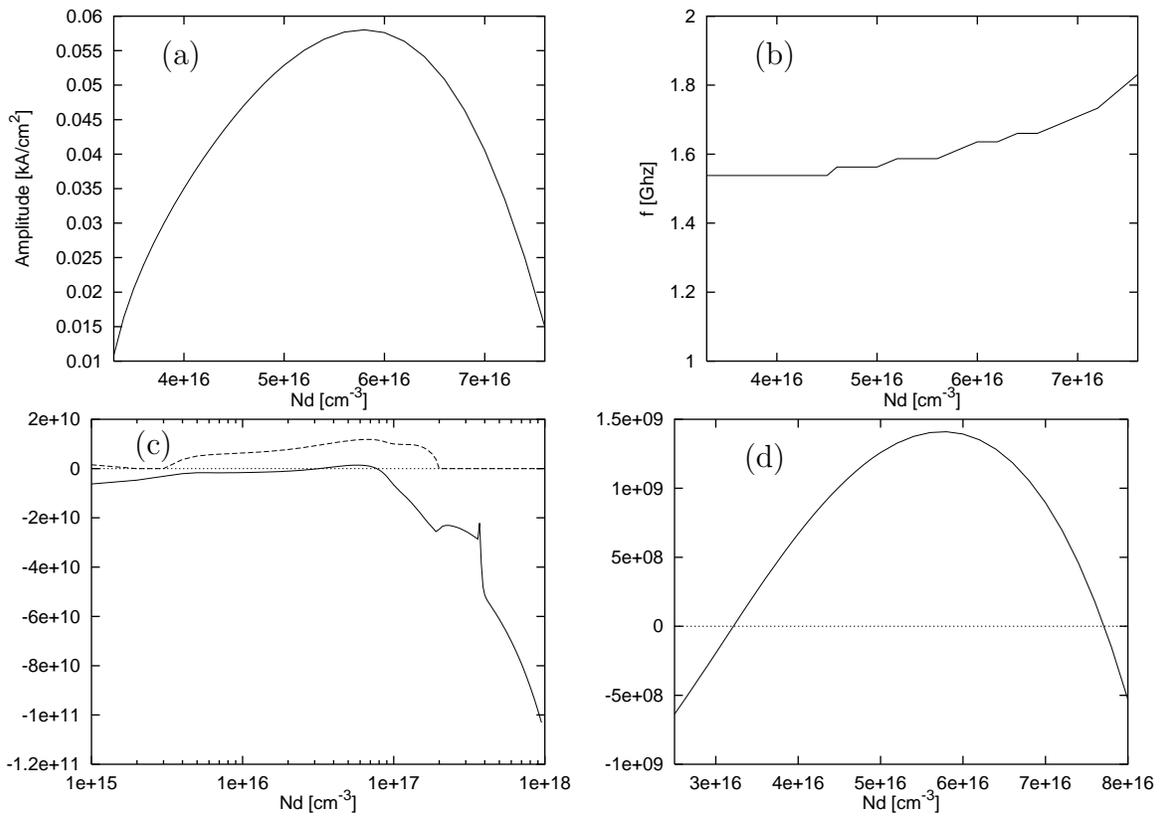


Abbildung 13: Eigenschaften bei konstanter Spannung $U = 1,0 \text{ V}$. **(a)** Oszillationsamplitude, **(b)** Oszillationsfrequenz, **(c)** Real- und Imaginärteil (gestrichelt) des größten Eigenwertes am (gegebenenfalls instabilen) Fixpunkt, **(d)** Vergrößerung des Realteils.

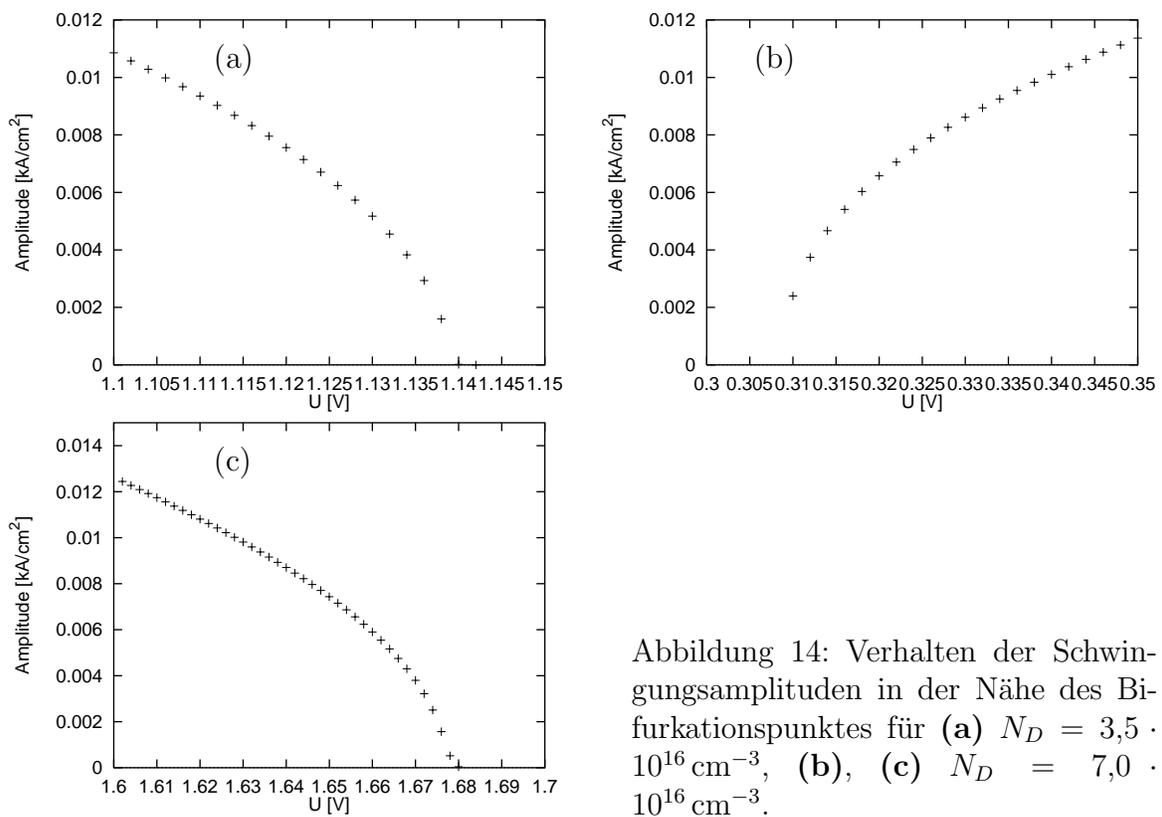


Abbildung 14: Verhalten der Schwingungsamplituden in der Nähe des Bifurkationspunktes für **(a)** $N_D = 3,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$, **(b)**, **(c)** $N_D = 7,0 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$.

A Parameter der Berechnungen

In allen Berechnungen wurden die folgenden Parameter verwendet: $m_1 = 0,06643 m_e$, $m_2 = 0,14986 m_e$, $V_0 = 982 \text{ meV}$, $L = 90 \text{ \AA}$, $B = 15 \text{ \AA}$, $\tau_e = 2 \text{ ps}$, $\tau_m = 0,005 \text{ ps}$, $\epsilon_r = 13,18$, $N = 40$.

Die Berechnung der Kurven in Abb. 3 erfolgte bei der Dotierungskonzentration $N_D = 6,7 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Die Berechnung der Kurven in Abb. 4 erfolgte bei $N_D = 6,0 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$. Die Berechnung der Kurven in Abb. 6 erfolgte bei $N_D = 3,5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ und einer angelegten Spannung $U = 1,0 \text{ V}$.

Literatur

- [1] F. Pregel, *Zur Kennlinie von Halbleiter-Übergittern*, Studienarbeit, TU Berlin (1993)
- [2] F. Pregel, *Nichtlinearer Ladungstransport in Halbleiterübergittern*, Diplomarbeit, TU Berlin (1994)
- [3] F. Pregel, A. Wacker, E. Schöll, Phys. Rev. B **50**, 1705 (1994)
- [4] G. Schwarz, *Vertikaler Transport in Übergittern mit Dickenfluktuationen*, Studienarbeit, TU Berlin (1994)
- [5] A. N. Korotkov, D. V. Averin, K. K. Likharev, Appl. Phys. Lett. **62**, 3282 (1993)
- [6] L. L. Bonilla, J. Galán, J. A. Cuesta, F. C. Martínez, J. M. Molera, Phys. Rev. B **50**, 8644 (1994)
- [7] J. Kastrup, R. Klann, H. T. Grahn, K. Ploog, L. L. Bonilla and J. Galán, M. Kindelan and M. Moscoso, R. Merlin, Phys. Rev. B **52**, 13761 (1995)
- [8] J. Kastrup, H. T. Grahn, K. Ploog, F. Pregel, A. Wacker and E. Schöll, Appl. Phys. Lett. **65**, 1808 (1994)
- [9] Y. Zhang, X. Yang, W. Liu, P. Zhang, D. Jiang, Appl. Phys. Lett. **65**, 1148 (1994)